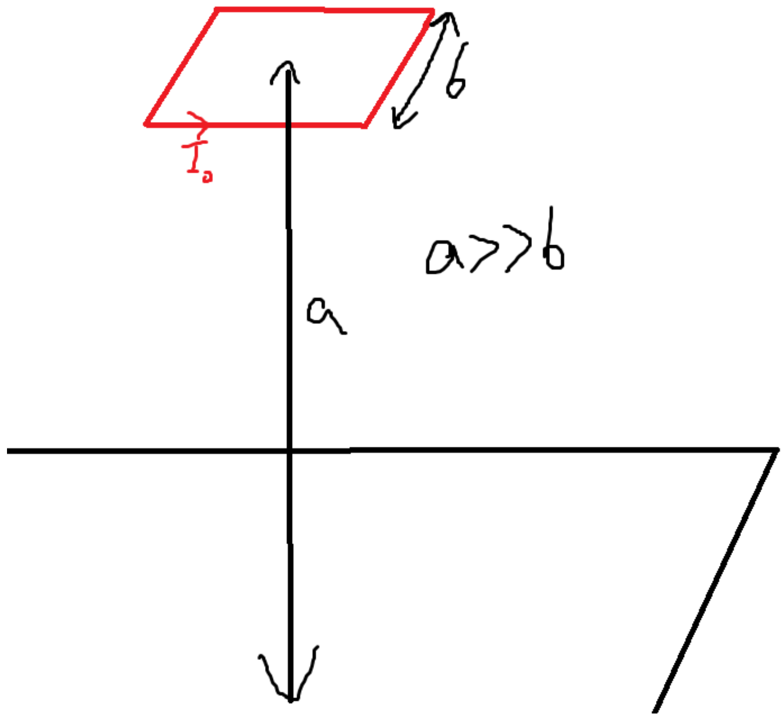
Во всех задачах я буду постоянно переключаться между **H** и **B, надеюсь, это вас не смутит, потому что они будут везде равны.**

Все задачи в этой методичке предлагались в 2022 году.

1. Квадратная рамка с током $J = J_0 \sin(\omega t)$ расположена на большом расстоянии a от идеально проводящей плоскости. Длина стороны рамки равна b и ее плоскость параллельна проводящей плоскости. Найти распределение токов на поверхности проводника.

Рисунок:



Вообще есть закон Био-Савара-Лапласа, который позволяет считать поле в каждой точке от элемента тока, а зная поле в плоскости, мы можем найти ток (там же). Но это слишком трудоёмко!

Воспользуемся тем, что a>>b, что нам позволяет считать кольцо маленьким, настолько маленьким, что мы можем его считать точечным магнитным моментом **m**.

Решение задачи, таким образом, разбивается на 3 этапа:

1) Подсчёт магнитного момента кольца:

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2}\oint[\boldsymbol{r}\text{x}\boldsymbol{dl}]$$

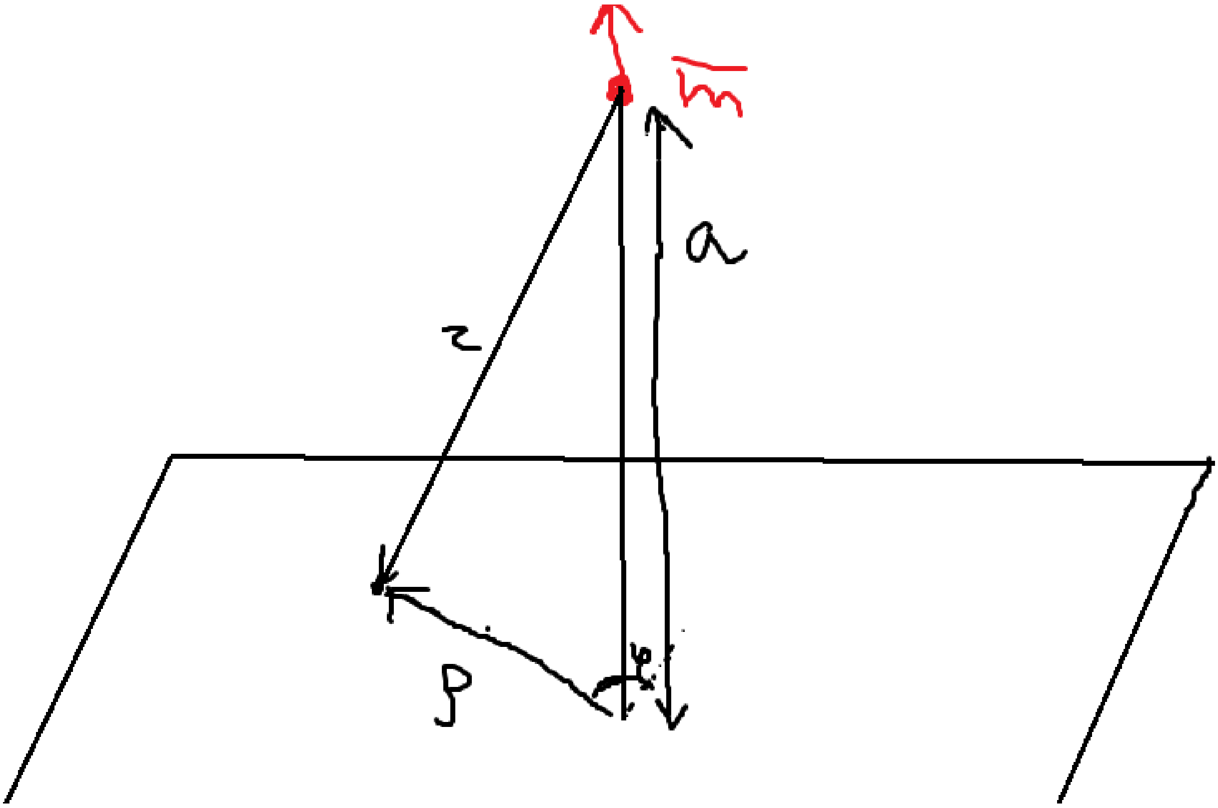
Будет

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2} * \frac{b}{2} * 4b\boldsymbol{e_z} = Ib^2\boldsymbol{e_z}$$

2) Подсчёт поля от магнитного момента в плоскости

$$\mathbf{B}=\frac{3(\boldsymbol{mr})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}r^2}{r^5}$$

Давайте вычислим. См. рисунок



Будет $\mathbf{B}=\dfrac{3ma\,\boldsymbol{r}-mr^2\boldsymbol{e_z}}{r^5}$

3) Зная магнитное поле на поверхности проводника, находим токи по формуле:

$$\vec{H}_\tau^{II}-\vec{H}_\tau^{I}\Big|_\Gamma=\frac{4\pi}{c}(\vec{i}_{\text{пов}},\vec{\nu})$$ (H совпадает с B)

ν – вектор на поверхности, коллинеарный **H**.

Магнитное поле (т.к. не оговорено иное) будем считать внутри проводника отсутствующим, т.к. что Ншка, соответствующая полю внизу (под плоскостью), будет 0, и останется лишь та, что сверху:

$H_\tau=\frac{4\pi}{c}(\vec{j},\vec{\nu})$, заботливо подсчитанная нами в пункте 2. Правда, есть нюанс: нужно брать именно тангенциальную составляющую поля, выкинув предварительно нормальную.

Если было $\mathbf{H} = \frac{3ma\boldsymbol{r} - mr^2\boldsymbol{e_z}}{r^5}$, то тангенциальная составляющая будет $\mathbf{H}_{\text{тангенц}} = \frac{3ma\boldsymbol{\rho}}{r^5}$

И вот это уже делим на $\frac{c}{4\pi}$.

Получаем плотность тока на поверхности в точке (ρ, φ):

$$j(\rho, \varphi) = \frac{c(3ma\boldsymbol{\rho})}{4\pi r^5}$$

Чтобы прямо совсем, можно подставить $r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ и заодно магнитный момент m из пункта 1. Получим ответ:

$$j(\rho, \varphi) = \frac{c(3ma\boldsymbol{\rho})}{4\pi(\rho^2 + a^2)^{5/2}}$$

Вот это – ток на поверхности. Т.е. в любой точке плоскости, зная её ρ и φ, мы можем найти ток. Ну разве это не прекрасно?

Подставляем

$$m = Ib^2:$$

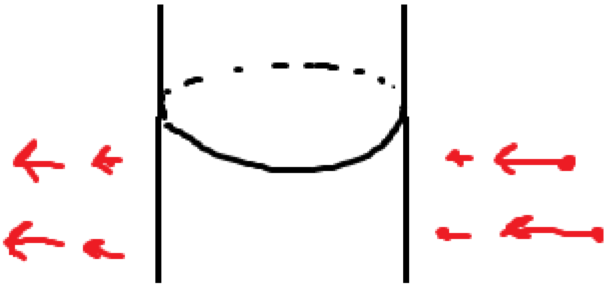
$$j(\rho, \varphi) = \frac{c(3Ib^2a\boldsymbol{\rho})}{4\pi(\rho^2 + a^2)^{5/2}}$$

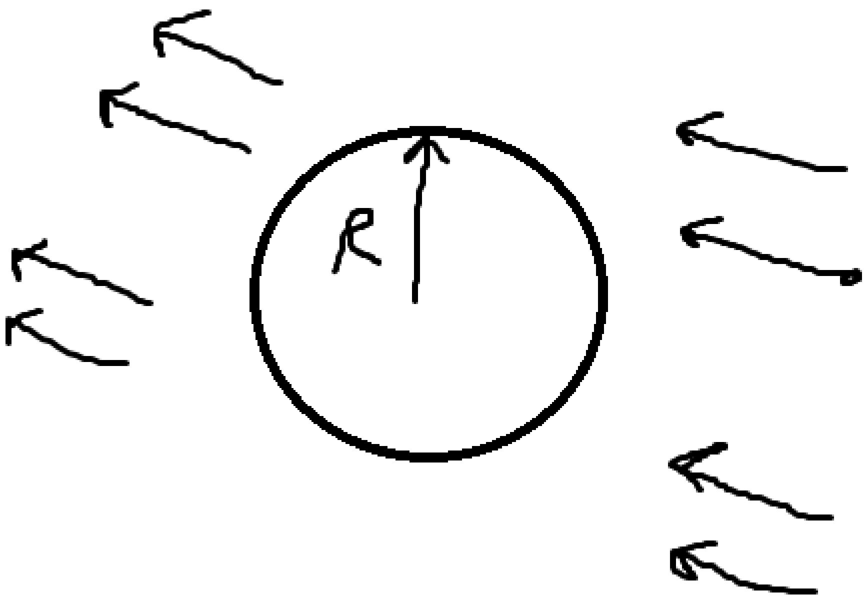
И вспоминаем, что $I = I_0 \sin(\omega t)$:

$$j(\rho, \varphi, t) = \frac{c(3I_0 \sin(\omega t) b^2 a\boldsymbol{\rho})}{4\pi(\rho^2 + a^2)^{5/2}}$$

Ответ получен.

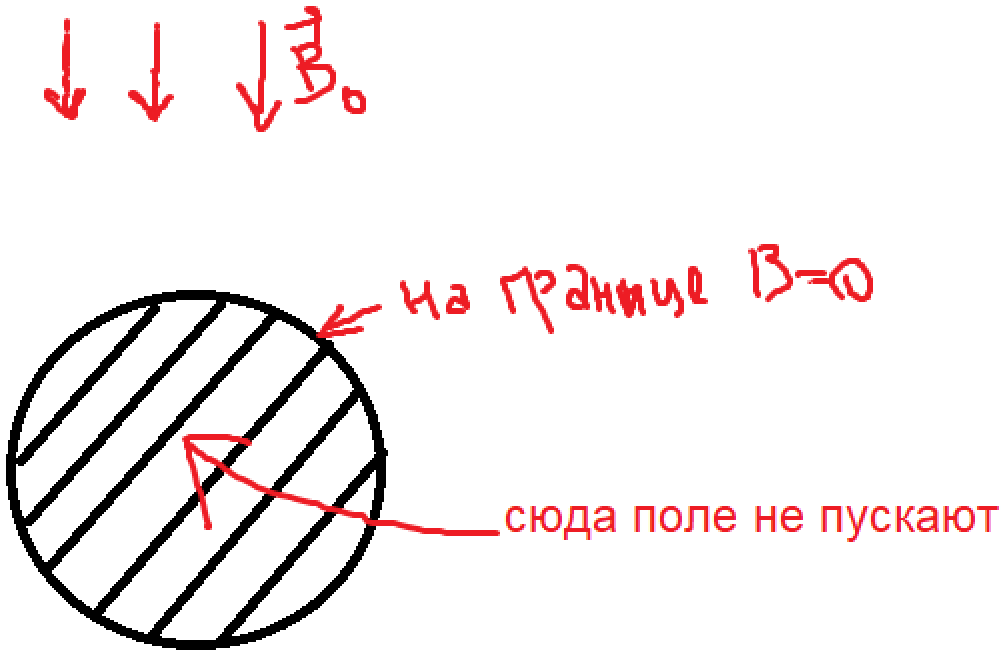
1. Проводящий цилиндр радиуса R_0 помещен во внешнее магнитное поле, перпендикулярное его оси и изменяющееся по закону: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i\omega t)$. Толщина скин-слоя $\delta \ll R_0$. Определить распределение токов на поверхности цилиндра.





Толщина скин-слоя маленькая, а значит, поле внутрь цилиндра не проникает.

В результате получаем… ММФ. Рассмотрим плоскость сечения цилиндра:



А если учесть, что можно **B** является потенциальном полем и можно ввести потенциал u (**H**=**B**=-grad u), то получаем ур-е Лапласа для u:
Δu=0.

Условие равенства 0 на границе цилиндра, учитывая, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} = \frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n}$, запишется как

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=R} = 0$$

А условие $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H_0}$ на бесконечности ($r \to +\infty$) заменится на u=-rcosφB_0. ГУ.

А такое мы решать умеем. Решать будем в полярной СК.
В ней

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n cosn\varphi + D_n sinn\varphi)$$

Теперь учитываем ГУ:
$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=R} = 0$- тут вообще нет ни синусов, ни косинусов
u=-rcosφH_0 – есть cos φ
Логично искать решение в виде:

$$u(r,\varphi) = A_0 + (A_1 r^1 + B_1 r^{-1})cos\varphi$$

Константу A0 можно сразу опустить: потенциал определён с точностью до константы:

$$u(r,\varphi) = (A_1 r + \frac{B_1}{r})cos\varphi$$

Устремляем r к бесконечности, получаем $A_1 r\cos\varphi$ => A1=-H_0.

$$u(r,\varphi) = (-H_0 r + \frac{B_1}{r})cos\varphi$$

Осталось определить последнюю константу - B1. Для этого берём производную при r=R и приравниваем её к 0:

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \left(-H_0 - \frac{B_1}{R^2}\right)cos\varphi = 0$$

Откуда

$$-H_0 - \frac{B_1}{R^2} = 0 => B_1 = -H_0 R^2$$

$$u(r,\varphi) = \left(-H_0 r + \frac{-H_0 R^2}{r}\right)cos\varphi = -H_0\cos\varphi(r + \frac{R^2}{r})$$

Хорошо, мы нашли потенциал u. Теперь от него переходим к полю, беря градиент, вычислив две его компоненты:

$$H_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = H_0\cos\varphi\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\boldsymbol{e_r}$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -H_0\sin\varphi\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\boldsymbol{e_\varphi}$$

Зетовой компоненты, напомню, нет, потому что исходный вектор $\mathbf{H_0}$ перпендикулярен оси цилиндра по условию.

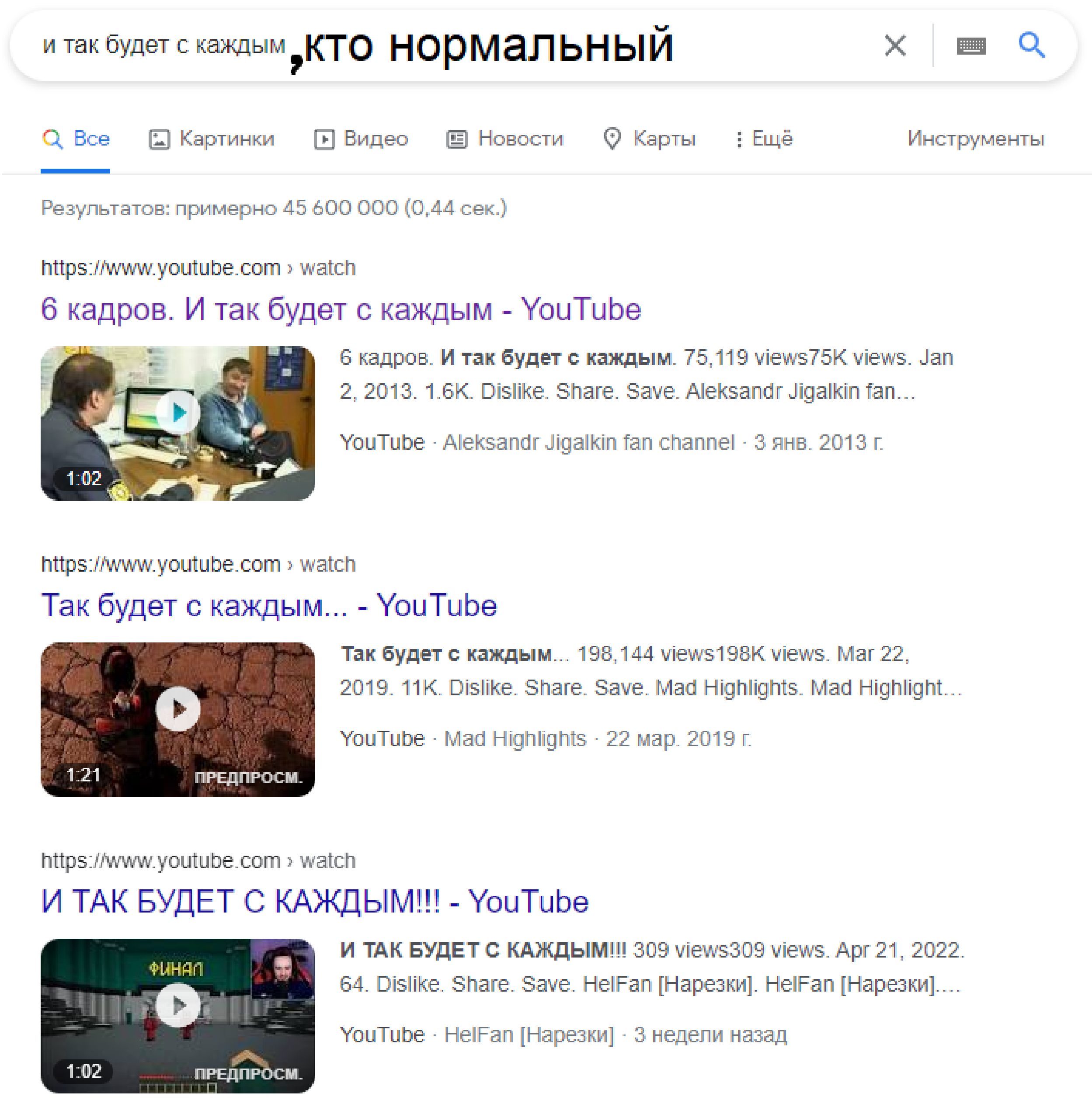
А теперь, зная поле, вспоминаем нашу любимую формулу:

$$\vec{H}_\tau^{II} - \vec{H}_\tau^{I}\big|_\Gamma = \frac{4\pi}{c}(\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{\nu})$$

Вновь внутри будет 0 (скин-эффект, как-никак!), поэтому она усохнет до

$$H_\tau = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}, \vec{\nu})$$

Подставляем. Естественно, подставляем именно H_φ - тангенциальную составляющую (и H_z, если бы она у нас была). А вот H_r есть радиальная, т.е. нормальная к поверхности цилиндра, поэтому ей придётся покинуть дальнейшие выкладки.



$$H_0 \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

$$\frac{c}{4\pi} H_0 \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = \left(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

Так как токи на поверхности, то подставляем r=R:

$$\frac{c}{2\pi} H_0 \sin\varphi = \left(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

В силу симметрии зетовой компоненты у поверхностного тока быть не может (а радиальной и подавно, иначе бы ему пришлось выйти из проводника). Поэтому есть только фитовая компонента. А коли так, то

$\boldsymbol{j}(\varphi) = \frac{c}{2\pi} H_0 \sin\varphi \, \boldsymbol{e}_\varphi$

И вновь мы нашли распределение токов на поверхности цилиндра. Можно даже сказать, что в точках, где φ=0

тока нет, а в точках φ=π/2 и –π/2

ток максимален и равен по модулю $\frac{c}{2\pi}H_0$.

Вот мы и разобрали два примера первой задачи на КР2. А вторая задача на КР2 непременно будет на Крамерса-Кронига, и эта тема разобрана в Электрод30.
Если вы хотите протренироваться с Крамерсом-Кронига, то вот вам две задачи с КР4 в 2022 году:

2. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти действительную часть диэлектрической проницаемости, если

$$\varepsilon'' = \frac{\alpha\omega}{[\omega^2 + \omega_0^2][\omega^2 + \omega_1^2]},$$

где α, ω_0 и ω_1 — постоянные.

2. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти действительную часть диэлектрической проницаемости, если

$$\varepsilon'' = \frac{\alpha\omega^3}{[\omega^2 + \omega_0^2][\omega^2 + \omega_1^2]},$$

где α, ω_0 и ω_1 — постоянные.

А ещё задача с КР4,тоже можете порешать:

1. Даны два тонких кольца, центры которых помещены в начало координат. Первое кольцо имеет радиус a и лежит в плоскости XOY, а второе имеет радиус b и лежит в плоскости XOZ. Найти взаимную индуктивность этих колец.